**Годишник на Минно-геоложкия университет "Св. Иван Рилски"**
**том 44-45, свитък III, Механизация, електрификация и автоматизация на мините, София, 2002, стр. 101-104**

# ВЪРХУ ЕКВИВАЛЕНТНОСТТА НА СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦИАЛНИ УРАВНЕНИЯ ВЪЗНИКВАЩИ В ЕЛЕКТРОМАГНИТНАТА ЗАДАЧА ЗА ДВЕ ТЕЛА

**Любомир Георгиев**

Минно-геоложки университет
“Св. Иван Рилски”
София 1700, България

**Васил Ангелов**

Минно-геоложки университет
“Св. Иван Рилски”
София 1700, България

РЕЗЮМЕ
Разглеждат се два типа системи от уравнения на движението, възникващи в електромагнитната задача за две тела (Synge, 1940; Synge, 1960) и е показана тяхната еквивалентност.

В представената статия се разглеждат два типа системи от уравнения на движението, възникващи в електромагнитната задача за две тела (Synge, 1940; Synge, 1960) и формулирани в (Angelov, 2002).

Най-напред да припомним някои означения и резултати (Angelov, 2002; Angelov, 2000).

**Уравненията на движение въведени от J. L. Synge**

Означаваме както в (Synge, 1940) с

$$x^{(p)}=(x_1^{(p)}(t),x_2^{(p)}(t),x_3^{(p)}(t),x_4^{(p)}(t)=ict)$$

$$(p=1,2,\ i^2=-1)$$

пространствено-времените координати на движещите се частици, с $m_p$ - техните собствени маси, с $e_p$ - техните заряди, $c$ - скоростта на светлината. Координатите на векторите на скоростта са

$$u^{(p)}=(u_1^{(p)}(t),u_2^{(p)}(t),u_3^{(p)}(t))\quad (p=1,2)\ .$$

Координатите на единичните допирателни вектори са

$$\lambda_\alpha^{(p)}=\frac{\gamma_p u_\alpha^{(p)}(t)}{c}=\frac{u_\alpha^{(p)}(t)}{\Delta_p}\ (\alpha=1,2,3),\ \lambda_4^{(p)}=i\gamma_p=\frac{ic}{\Delta_p}\ ,$$

където

$$\gamma_p=\left(1-\frac{1}{c^2}\sum_{\alpha=1}^{3}[u_\alpha^{(p)}(t)]^2\right)^{-\frac{1}{2}},\ \Delta_p=\left(c^2-\sum_{\alpha=1}^{3}[u_\alpha^{(p)}(t)]^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Следователно $\gamma_p=c/\Delta_p$ .

Означаваме скаларното произведение в пространство-то на Минковски с $<.,.>_4$ , а с $<.,.>$ - скаларното произведение в 3-мерното евклидово подпространство.

Уравненията на Synge са:

$$m_p\frac{d\lambda_r^{(p)}}{ds_p}=\frac{e_p}{c^2}F_{rn}^{(p)}\lambda_n^{(p)}\quad (r=1,2,3,4) \tag{1}$$

където $ds_p=\dfrac{c}{\gamma_p}dt=\Delta_p dt\ (p=1,2)$ . Да отбележим, че в (1) се сумира по $n\ (n=1,2,3)$ . Елементите на електромагнитния тензор - $F_{rn}^{(p)}$ , се получават от закъсняващите потенциали (на Lienard-Wiechert)

$$A_r^{(p)}=-\frac{e_p\lambda_r^{(p)}}{\left\langle\lambda^{(p)},\xi^{(pq)}\right\rangle_4}\quad (r=1,2,3,4)\ \text{, т.е.}$$

$$F_{rn}^{(p)}=\frac{\partial A_n^{(p)}}{\partial x_r^{(p)}}-\frac{\partial A_r^{(p)}}{\partial x_n^{(p)}}\quad \xi^{(pq)}\ .$$

Означаваме с $\xi^{(pq)}$ изотропния вектор (вж. [1], [2]):

$$\xi^{(pq)}=(x_1^{(p)}(t)-x_1^{(q)}(t-\tau_{pq}(t)),$$
$$x_2^{(p)}(t)-x_2^{(q)}(t-\tau_{pq}(t)),x_3^{(p)}(t)-x_3^{(q)}(t-\tau_{pq}(t)),ic\tau_{pq}(t))$$

където $\left\langle\xi^{(p,q)},\xi^{(p,q)}\right\rangle_4=0$ , или

$$\tau_{pq}(t) = \frac{1}{c}\left(\sum_{\beta=1}^{3}[x_{\beta}^{(p)}(t) - x_{\beta}^{(q)}(t - \tau_{pq}(t))]^2\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (*)$$

$((pq) = (12), (21))$.

Пресмятайки $F_{rn}^{(p)}$ както в (Angelov, 1990) можем да напишем уравненията от (1) във вида

$$\frac{d\lambda_{\alpha}^{(p)}}{ds_p} = \frac{Q_p}{c^2}\left\{\frac{\xi_{\alpha}^{(pq)}\left\langle\lambda^{(p)},\lambda^{(q)}\right\rangle_4 - \lambda_{\alpha}^{(q)}\left\langle\lambda^{(p)},\xi^{(pq)}\right\rangle_4}{\left\langle\lambda^{(q)},\xi^{(pq)}\right\rangle_4^3}\left[1 + \left\langle\xi^{(pq)},\frac{d\lambda^{(q)}}{ds_q}\right\rangle_4\right] + \frac{1}{\left\langle\lambda^{(q)},\xi^{(pq)}\right\rangle_4^2}\left[\left\langle\lambda^{(p)},\xi^{(pq)}\right\rangle_4\frac{d\lambda^{(q)}}{ds_q} - \left\langle\xi^{(pq)},\frac{d\lambda^{(q)}}{ds_q}\right\rangle_4\xi_{\alpha}^{(pq)}\right]\right\} \quad (\alpha = 1,2,3) \qquad (2.\alpha)$$

$$\frac{d\lambda_{4}^{(p)}}{ds_p} = \frac{Q_p}{c^2}\left\{\frac{\xi_{4}^{(pq)}\left\langle\lambda^{(p)},\lambda^{(q)}\right\rangle_4 - \lambda_{4}^{(q)}\left\langle\lambda^{(p)},\xi^{(pq)}\right\rangle_4}{\left\langle\lambda^{(q)},\xi^{(pq)}\right\rangle_4^3}\left[1 + \left\langle\xi^{(pq)},\frac{d\lambda^{(q)}}{ds_q}\right\rangle_4\right] + \frac{1}{\left\langle\lambda^{(q)},\xi^{(pq)}\right\rangle_4^2}\left[\left\langle\lambda^{(p)},\xi^{(pq)}\right\rangle_4\frac{d\lambda^{(q)}}{ds_q} - \left\langle\xi^{(pq)},\frac{d\lambda^{(q)}}{ds_q}\right\rangle_4\xi_{4}^{(pq)}\right]\right\} \qquad (2.4)$$

където $Q_p = \dfrac{e_1.e_2}{m_p}$, $(p = 1,2)$.

Означаваме $u^{(q)} \equiv u^{(q)}(t - \tau_{pq})$,

$$\lambda^{(q)} = (\gamma_{pq}u_1^{(q)}/c, \gamma_{pq}u_2^{(q)}/c, \gamma_{pq}u_3^{(q)}/c, i\gamma_{pq}) =$$
$$= (u_1^{(q)}/\Delta_{pq}, u_2^{(q)}/\Delta_{pq}, u_3^{(q)}/\Delta_{pq}, ic/\Delta_{pq}),$$

където

$$\gamma_{pq} = \left(1 - \frac{1}{c^2}\sum_{\alpha=1}^{3}[u_{\alpha}^{(q)}(t - \tau_{pq}(t))]^2\right)^{-\frac{1}{2}},$$

$$\Delta_{pq} = \left(c^2 - \sum_{\alpha=1}^{3}[u_{\alpha}^{(q)}(t - \tau_{pq}(t))]^2\right)^{\frac{1}{2}} \text{ и}$$

$$\frac{d\lambda_{\alpha}^{(p)}}{ds_p} = \frac{d\left(\frac{\gamma_p}{c}u_{\alpha}^{(p)}\right)}{\frac{c}{\gamma_p}dt} = \frac{d\left(\frac{u_{\alpha}^{(p)}}{\Delta_p dt}\right)}{\Delta_p dt} =$$

$$= \frac{1}{\Delta_p^2}\dot{u}_{\alpha}^{(p)} + \frac{u_{\alpha}^{(p)}}{\Delta_p^4}\left\langle u^{(p)},\dot{u}^{(p)}\right\rangle \quad (\alpha = 1,2,3)$$

$$\frac{d\lambda_4^{(p)}}{ds_p} = \frac{d(i\gamma_p)}{\frac{c}{\gamma_p}dt} = \frac{icd\left(\frac{1}{\Delta_p}\right)}{\Delta_p dt} = \frac{ic}{\Delta_p^4}\left\langle u^{(p)},\dot{u}^{(p)}\right\rangle,$$

където точката означава диференциране по *t*.

Както в (Angelov, 2000), където се доказва, че 4-то и 8-то уравнения са следствие от останалите, получаваме система от 6 уравнения. Сега можем да формулираме задача с начални условия по следния начин: да се намерят неизвестните скорости $u_{\alpha}^{(p)}(t)$ $(p = 1,2;\ \alpha = 1,2,3)$, които удовлетворяват уравненията на движение $(3_{1\alpha}), (3_{2\alpha})$, както следва:

$$\frac{1}{\Delta_1}\dot{u}_{\alpha}^{(1)} + \frac{u_{\alpha}^{(1)}}{\Delta_1^3}\left\langle u^{(1)},\dot{u}^{(1)}\right\rangle =$$

$$= \frac{Q_1}{c^2}\left\{\frac{\left[c^2 - \left\langle u^{(1)},u^{(2)}\right\rangle\right]\xi_{\alpha}^{(12)} - \left[c^2\tau_{12} - \left\langle u^{(1)},\xi^{(12)}\right\rangle\right]u_{\alpha}^{(2)}}{\left[c^2\tau_{12} - \left\langle u^{(1)},\xi^{(12)}\right\rangle\right]^3} \times\right.$$

$$\times \frac{\Delta_{12}^4 + D_{12}\Delta_{12}^2\left\langle\xi^{(12)},\dot{u}^{(2)}\right\rangle + \left(\left\langle\xi^{(12)},u^{(2)}\right\rangle - c^2\tau_{12}\right)\left\langle u^{(2)},\dot{u}^{(2)}\right\rangle}{\Delta_{12}^2} +$$

$$+ D_{12}\frac{\left(\left\langle u^{(1`)},\xi^{(12)}\right\rangle - c^2\tau_{12}\right)\dot{u}_{\alpha}^{(2)} - \left\langle u^{(1)},\dot{u}^{(2)}\right\rangle\xi_{\alpha}^{12}}{\left[c^2\tau_{12} - \left\langle u^{(2`)},\xi^{(12)}\right\rangle\right]^2} + \qquad (3_{1\alpha})$$

$$+ \frac{D_{12}}{\Delta_{12}^2}\cdot\frac{\left(\left\langle u^{(1`)},\xi^{(12)}\right\rangle - c^2\tau_{12}\right)u_{\alpha}^{(2)}\left\langle u^{(2)},\dot{u}^{(2)}\right\rangle}{\left[c^2\tau_{12} - \left\langle u^{(2`)},\xi^{(12)}\right\rangle\right]^2} +$$

$$\left. + \frac{D_{12}}{\Delta_{12}^2}\cdot\frac{\left(c^2 - \left\langle u^{(1`)},u^{(2)}\right\rangle\right)\xi_{\alpha}^{(12)}\left\langle u^{(2)},\dot{u}^{(2)}\right\rangle}{\left[c^2\tau_{12} - \left\langle u^{(2`)},\xi^{(12)}\right\rangle\right]^2}\right\}.$$

$$\frac{1}{\Delta_2}\dot{u}_\alpha^{(2)} + \frac{u_\alpha^{(2)}}{\Delta_1^3}\left\langle u^{(2)}, \dot{u}^{(2)}\right\rangle =$$

$$= \frac{Q_1}{c^2}\left\{ \frac{\left[c^2 - \left\langle u^{(1)}, u^{(2)}\right\rangle\right]\xi_\alpha^{(21)} - \left[c^2\tau_{12} - \left\langle u^{(1)}, \xi^{(21)}\right\rangle\right]u_\alpha^{(1)}}{\left[c^2\tau_{12} - \left\langle u^{(1)}, \xi^{(12)}\right\rangle\right]^3} \times \right.$$

$$\times \frac{\Delta_{21}^4 + D_{21}\Delta_{21}^2\left\langle \xi^{(21)}, \dot{u}^{(1)}\right\rangle + \left(\left\langle \xi^{(21)}, u^{(1)}\right\rangle - c^2\tau_{21}\right)\left\langle u^{(1)}, \dot{u}^{(1)}\right\rangle}{\Delta_{21}^2} +$$

$$+ D_{21}\frac{\left(\left\langle u^{(2`)}, \xi^{(21)}\right\rangle - c^2\tau_{21}\right)\dot{u}_\alpha^{(1)} - \left\langle u^{(2)}, \dot{u}^{(1)}\right\rangle \xi_\alpha^{21}}{\left[c^2\tau_{21} - \left\langle u^{(1`)}, \xi^{(21)}\right\rangle\right]^2} +$$

$$+ \frac{D_{21}}{\Delta_{21}^2}\cdot\frac{\left(\left\langle u^{(2`)}, \xi^{(21)}\right\rangle - c^2\tau_{21}\right)u_\alpha^{(1)}\left\langle u^{(1)}, \dot{u}^{(1)}\right\rangle}{\left[c^2\tau_{21} - \left\langle u^{(1`)}, \xi^{(21)}\right\rangle\right]^2} + \qquad (3_{2\alpha})$$

$$\left. + \frac{D_{21}}{\Delta_{21}^2}\cdot\frac{\left(c^2 - \left\langle u^{(2`)}, u^{(1)}\right\rangle\right)\xi_\alpha^{(21)}\left\langle u^{(1)}, \dot{u}^{(1)}\right\rangle}{\left[c^2\tau_{21} - \left\langle u^{(1`)}, \xi^{(21)}\right\rangle\right]^2} \right\}$$

Припомняме, че в горните уравнения $(3_{1\alpha})$

$u^{(1)} = u^{(1)}(t), u^{(2)} = u^{(2)}(t - \tau_{12})$,

докато в $(3_{2\alpha})$ $u^{(2)} = u^{(2)}(t), u^{(1)} = u^{(1)}(t - \tau_{21})$, а закъсняващата функция $\tau_{pq}(t)$ удовлетворява функционалните уравнения (*) за $t \in (-\infty, \infty)$.

За $t \le 0$ функциите $u_\alpha^{(p)}(t)$ са дадени:

$u_\alpha^{(p)}(t) = \bar{u}_\alpha^{(p)}(t), t \le 0$,

където

$$\bar{u}_\alpha^{(p)}(t) = \frac{d\bar{x}_\alpha^{(p)}(t)}{dt}, t \le 0.$$

Това означава, че за дадените траектории $(\bar{x}_1^{(1)}(t), \bar{x}_2^{(1)}(t), \bar{x}_3^{(1)}(t)), (\bar{x}_1^{(2)}(t), \bar{x}_2^{(2)}(t), \bar{x}_3^{(2)}(t))$ за $t \le 0$ трябва да се намерят траектории удовлетворяващи горната система от уравнения при $t > 0$. (Припомняме, че $x_\alpha^{(p)}(t) = x_{\alpha 0}^{(p)} + \int_0^t u_\alpha^{(p)}(s)ds$, където $x_{\alpha 0}^{(p)}$ са началните координати).

**Задача на Кеплер в полярни координати**

Сега ще разгледаме равнинно движение в координатната система $Ox_2x_3$ за горните уравнения. Предполагаме, че първата частица $P_1$ е фиксирана в началото $O(0,0,0)$, т.е.

$$P_1 : \left| \begin{array}{l} x_1^{(1)}(t) = 0 \\ x_2^{(1)}(t) = 0, \quad t \in (-\infty, \infty) \\ x_3^{(1)}(t) = 0 \end{array} \right.$$

. Следователно, по необходимост,

$$\left| \begin{array}{l} \bar{x}_1^{(1)}(t) = 0 \\ \bar{x}_2^{(1)}(t) = 0 \\ \bar{x}_3^{(1)}(t) = 0 \end{array} \right.$$

. Преминавайки в полярни координати полагаме

$$P_1 : \left| \begin{array}{l} x_1^{(2)}(t) = 0 \\ x_2^{(2)}(t) = \rho(t)\cos\varphi(t) \\ x_3^{(2)}(t) = \rho(t)\sin\varphi(t) \end{array} \right.$$

, където $\rho(t) > 0$.

След преобразувания направени в (Angelov, 2002) получаваме следната система от втори ред:

$$\ddot{\rho}(t) = \rho(t)\dot{\varphi}^2(t) + \frac{Q_2}{c^3}\cdot\frac{\left[c^2 - \dot{\rho}^2(t)\right]\sqrt{c^2 - \dot{\rho}^2(t) - \rho^2(t)\dot{\varphi}^2(t)}}{\rho^2(t)}$$

(4)

$$\ddot{\varphi}(t) = -\frac{2\dot{\rho}(t)\dot{\varphi}(t)}{\rho(t)}\cdot\left[1 + \frac{Q_2\sqrt{c^2 - \dot{\rho}^2(t) - \rho^2(t)\dot{\varphi}^2(t)}}{2c^3\rho(t)}\right]$$

при $t > 0$ и начални условия

$\rho(0) = \rho_0, \dot{\rho}(0) = \dot{\rho}_0, \varphi(0) = \varphi_0, \dot{\varphi}(0) = \dot{\varphi}_0$.

От друга страна, започвайки от началната форма на уравненията на Synge (Angelov, 2000), получаваме за кеплеровата задача следните уравнения на движение:

$$\frac{d(\gamma_2 u_\alpha^{(2)})}{dt} = \frac{Q_2\xi_\alpha^{(21)}}{\rho^3} \quad (\alpha = 1,2,3) \qquad (5_\alpha)$$

Но $\xi^{(21)} = (0, \rho(t)\cos\varphi(t), \rho(t)\sin\varphi(t))$. Тогава с интегриране от 0 до *t* получаваме

$\gamma_2(t)u_\alpha^{(2)}(t) - \gamma_2^0 u_\alpha^{(2)}(0) = Q_2\int_0^t \frac{\xi_\alpha^{(21)}(s)}{\rho^3(s)}ds$ или

$$\left| \begin{array}{l} \dot{\rho}(t)\cos\varphi(t) - \rho(t)\dot{\varphi}(t)\sin\varphi(t) = \dfrac{1}{\gamma_2(t)}\left[Q_2\displaystyle\int_0^t \frac{\cos\varphi(s)}{\rho^2(s)}ds + C_2\right] \\ \dot{\rho}(t)\sin\varphi(t) + \rho(t)\dot{\varphi}(t)\cos\varphi(t) = \dfrac{1}{\gamma_2(t)}\left[Q_2\displaystyle\int_0^t \frac{\sin\varphi(s)}{\rho^2(s)}ds + C_3\right] \end{array} \right. \qquad (6)$$

където $C_2 = \gamma_2^0\left(\dot{\rho}_0\cos\varphi_0 - \rho_0\dot{\varphi}_0\sin\varphi_0\right)$,

$$C_3 = \gamma_2^0\left(\dot\rho_0 \sin\varphi_0 + \rho_0\dot\varphi_0 \cos\varphi_0\right),$$

$$\gamma_2^0 = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{c^2}(\dot\rho_0^2 + \rho_0^2\dot\varphi_0^2)}}.$$

Системите (6) и $(5_\alpha)$ са еквивалентни, тъй като дясната страна на $(5_\alpha)$ е непрекъсната вектор-функция на *t* (което е необходимо и достатъчно условие за еквивалентност на двете системи). Наистина вектор-функцията $\vec F(t) = \left(\frac{\cos\varphi(t)}{\rho^2(t)}, \frac{\sin\varphi(t)}{\rho^2(t)}\right)$ е непрекъсната, тъй като $\left|\vec F(t) - \vec F(t_0)\right|^2 =$

$$= \frac{1}{\rho^4(t)} + \frac{1}{\rho^4(t_0)} - \frac{2\cos(\varphi(t)-\varphi(t_0))}{\rho^2(t)\rho^2(t_0)} \underset{t\to t_0}{\to} 0.$$

Разбира се $\frac{d}{dt}\left(\gamma_2 u_\alpha^{(2)}\right) = \dot\gamma_2 u_\alpha^{(2)} + \gamma_2 \dot u_\alpha^{(2)}$, $(\alpha = 2,3)$

$$\dot\gamma_2 = \frac{d}{dt}\left(\frac{c}{\Delta_2}\right) = \frac{c}{\Delta_2^3}\langle u,\dot u\rangle.$$

Тогава от $(5_\alpha)$ (с $u \equiv u^{(2)}$ за краткост) получаваме:

$$\begin{cases} \frac{c}{\Delta_2^3}\langle u,\dot u\rangle u_2 + \frac{c}{\Delta_2}\dot u_2 = \frac{Q_2\cos\varphi}{\rho^2} \\ \frac{c}{\Delta_2^3}\langle u,\dot u\rangle u_3 + \frac{c}{\Delta_2}\dot u_3 = \frac{Q_2\sin\varphi}{\rho^2}. \end{cases} \qquad (7)$$

Умножавайки първото уравнение с $u_2$, второто с $u_3$ и сумирайки, получаваме уравнението

$$\frac{c}{\Delta_2^3}\langle u,\dot u\rangle\left(\langle u,u\rangle + \Delta_2^2\right) = \frac{Q_2}{\rho^2}\quad(u_2\cos\varphi + u_3\sin\varphi),$$

т.е. $\frac{c}{\Delta_2^3}\langle u,\dot u\rangle = \frac{Q_2\dot\rho}{c^2\rho^2}$.

С други думи получихме връзката $\dot\gamma_2 = \frac{Q_2\dot\rho}{c^2\rho^2}$.

Умножавайки първото уравнение на (7) с $\cos\varphi$, а второто със $\sin\varphi$ и сумирайки, и след това първото уравнение с $-\sin\varphi$, второто с $\cos\varphi$ и сумирайки, получаваме системата $\begin{cases}\dot\gamma_2\dot\rho + \gamma_2(\ddot\rho - \rho\dot\varphi^2) = \frac{Q_2}{\rho^2} \\ \dot\gamma_2\rho\dot\varphi + \gamma_2(2\dot\rho\dot\varphi + \rho\ddot\varphi) = 0\end{cases}$, или (като заместим $\dot\gamma_2 = \frac{Q_2\dot\rho}{c^2\rho^2}$):

$$\begin{cases}\gamma_2(\ddot\rho - \rho\dot\varphi^2) = \frac{Q_2}{c^2\rho^2}(c^2 - \dot\rho^2) \\ \gamma_2(\rho\ddot\varphi + 2\dot\rho\dot\varphi) = -\frac{Q_2}{c^2\rho}\dot\rho\dot\varphi\end{cases} \qquad (8)$$

Очевидно системите (8) и (4) са една и съща система, с точност до прехвърляне на събираеми, тъй като $\gamma_2 = \frac{c}{\Delta_2} = \frac{c}{\sqrt{c^2 - \dot\rho^2 - \rho^2\dot\varphi^2}}$.

## ЛИТЕРАТУРА


Synge J.L. 1940. On the electromagnetic two-body problem. Proc. Roy. Soc. (London), ser. A, 177, 118-139.

Synge J.L. 1960. Classical Dynamics, Springer-Verlag,

Angelov V.G. 2002. Plane orbits for Synge's electrodynamics two-body problem (I). Seminar on Fixed Point Theory – Cluj-Napoca, to appear.

Angelov V.G. 1990. On the Synge equation in 3-dimensional two-body problem of classical electrodynamics. J. Math. Anal. Appl., v.151, N 2, 488-511.

Angelov V. G. 2000. Escape trajectories of J. L. Synge equations. J. Non. Anal. RWA, ser. B, v. 1, 189-204.


*Препоръчана за публикуване от катедра "Математика" на МЕМФ*